EIN ANSCHAUUNGSORIENTIERTES KONZEPT ZUM UNTERRICHTEN VON BRUCHRECHNEN

Stephan Rosebrock und Anna Schill

1 Theoretische Fundierung des Konzepts

1.1 Vom Umgang mit Vorstellungen und Regeln

Welche Lehrerin/Lehrer kennt das Phänomen nicht? In Stillarbeit sollen die Schüler einer sechsten Realschulklasse einige Aufgaben zur Bruchrechnung lösen. Eine Aufgabe ist die Vereinfachung des folgenden Terms:

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5} \qquad (1)$$

Ich komme zu einem Schüler und sehe für mich undurchschaubare Rechnungen auf seinem Blatt. Erklären kann er mir auch nicht, was er tut. Also möchte ich mit ihm zusammen die Aufgabe lösen und frage zuerst: „Was ist zwei mal ein Halb?“. Der Schüler überlegt zehn Sekunden und sagt dann: „Ein Viertel“. Erst längeres Argumentieren und Visualisieren mit Pizzastücken und ähnlichen bekannten Anschauungsmöglichkeiten überzeugt ihn anschließend von der richtigen Lösung.

Was passiert hier? Offensichtlich hat der Schüler statt des Zählers den Nenner mit zwei multipliziert. Wie kann das passieren? Ein reiner Flüchtigkeitsfehler ist unwahrscheinlich, der Schüler hat zu lange überlegt. Hätte der Schüler eine tragfähige Grundvorstellung eines Bruchs, so hätte er die Aufgabe leicht lösen können (etwa als 2 halbe Pizzen, die zusammen eine ganze ergeben). Spätestens bei der Nennung des Ergebnisses (ein Viertel) hätte ihm auffallen müssen, dass eine viertel Pizza ja weniger ist als eine halbe Pizza und so dieses Ergebnis nicht möglich ist.

Daraus kann man schließen, dass der Schüler über diese oder ähnliche Grundvorstellungen in der Bruchrechnung nicht oder nicht ausreichend verfügt. Das ist erstaunlich, die Lehrerin hat nämlich sehr ausführlich Vorstellungen zu Brüchen und zum Multiplizieren von Brüchen thematisiert. Die Notwendigkeit der Behandlung von Grundvorstellungen, wie sie etwa in MALLE (2004) beschrieben werden, ist ihr bewusst. Aus welchem Grund auch immer hat der Schüler jedoch die notwendigen Begriffsbildungen nicht vorgenommen. Über die Gründe wollen wir hier nicht spekulieren. Die Regeln, die die Lehrerin am Ende jeder Lerneinheit formuliert hat, bieten dem Schüler aber eine Möglichkeit, auch ohne Vorstellungen die Aufgaben zu lösen.

Die Regel

> *Man multipliziert eine ganze Zahl mit einem Bruch, indem man die Zahl mit dem Zähler multipliziert*

hätte den Schüler weitergebracht. Vermutlich hatte er sie nicht mehr richtig im Kopf.

Nun ist gegen Regeln (das sind für uns hier im weitesten Sinne Formeln oder Berechnungsvorschriften) erst einmal nichts einzuwenden. Man könnte versucht sein, Mathematik als ein Werk von Regeln zu definieren, um Berechnungen zu vereinfachen, und wenn wir Mathematik in der Schule vermitteln wollen, müssen wir diese Regeln unterrichten. Hinter jeder Regel stecken aber Vorstellungen, die uns zu diesen Regeln führen. Mit entsprechenden Vorstellungen sind aber die Regeln, zumindest beim Bruchrechnen, sehr einfach zu konstruieren. Verfügt man über diese Vorstellungen, so ist die oben genannte Regel beinahe eine Selbstverständlichkeit. Die Regel braucht nicht mehr auswendig gelernt werden. Wenn man sie vergessen hat, kann man sie leicht rekonstruieren: Man möchte 5×3/4 rechnen und kann das durch: *Nehme ich 3 Viertel Stücke Pizza 5 mal, so habe ich 15 Viertel Stücke Pizza*.

Fehlen die zentralen Grundvorstellungen beim Bruchrechnen (in unserem Fall die konkrete Vorstellung von einem Bruch und die Vorstellung vom Multiplizieren als Vervielfachen), so präsentiert sich die Bruchrechnung dem Schüler als ein undurchschaubares Netz von komplizierten Regeln, die angewendet werden müssen. Aufgaben lösen heißt dann: Nachdenken, welche Regel jetzt zu nehmen ist, und Mathematikunterricht reduziert sich dann im Extremfall auf das Abarbeiten von Regeln. Schon METZGER (1976, 147ff) beschreibt einen häufig wiederholten Versuch mit seinen Studierenden zur Division von Brüchen. Fast alle „können“ Brüche dividieren, d. h. sie kennen die Regel zur Division von Brüchen und können sie anwenden, aber kaum einer weiß, warum diese Regel richtig ist. Anschließend beschreibt er die Ängstlichkeit der Studierenden, sich produktiv denkend klarzumachen, warum diese Regel stimmt. Er deutet ihren Ursprung als Folge unseres Schulbetriebs.

WINTER schreibt dazu: „Der Erwerb und Gebrauch von Kompetenzen in der Bruchrechnung [...] darf nicht einseitig syntaktisch orientiert sein [...] sondern muss weit stärker als bisher die semantische Seite (Sinn und Bedeutung der Zeichen) betonen.“ (WINTER 1999, 2).

METZGER (zit. n. SOFF, 2001, 187) nennt das Abarbeiten von Regeln zur Lösung eines Problems die *mechanische Lösung*. Das sture Abarbeiten von Regeln verhindert das selbständige Denken im Mathematikunterricht und ist somit kontraproduktiv. METZGER schreibt dazu: „Im Geistigen macht Übung nur dann den Meister, wenn die Mechanisierung eines erlernten Vorgehens mit allen Mitteln verhindert wird. Das lässt sich nur dadurch erreichen, dass man durch ihre Wahl und Anordnung den Schüler zwingt, bei jeder neuen Aufgabe von seinem Kopf Gebrauch zu machen...“ (METZGER 1973, 118)

Dass im Mathematikunterricht zu stark einseitig Regeln abgearbeitet werden, beobachtet man nicht nur beim Bruchrechnen, sondern unter anderem auch beim Prozentrechnen und sogar bei der Differentialrechnung in der Oberstufe, wenn Schüler zwar Kurvendiskussion „können“, aber jede Vorstellung davon fehlt, was eigentlich die Ableitung einer Funktion ist.

Basis aller Regeln im Mathematikunterricht sind aber Grundvorstellungen. Regeln lassen sich, sofern die notwendigen Grundvorstellungen vorhanden sind, leichter lernen. Aber selbst wenn ein Schüler die Regeln perfekt beherrscht: ohne die Grundvorstellungen bleibt dieses Wissen absolut sinnlos. Was nutzt jedes „Rechnen können" mit Brüchen, wenn man nicht weiß, mit welchen Objekten und Methoden man umgeht, also was man tut?

Hat der Schüler erst einmal eine Vorstellung von den Objekten, mit denen er hantiert, fällt ihm die Verbindung zwischen diesen Objekten und bereits bekannten Rechenoperationen leichter. In der neuen Situation, nämlich Brüche mit einer Operation zu verbinden, „werden auf Grund der erfassten und behaltenen Gestaltqualitäten analoge Züge und Strukturen erkannt. Es kommt zur ‚Erfassung des bei Kovariation invariant Bleibenden.'" (WITTE, zit. n. SEEL 1997, 105). Zu einem späteren Zeitpunkt ist der Schüler auch fähig dazu, Analogien zu den erfassten Rechenoperationen mit konkret vorliegenden Brüchen zu ziehen, wenn es darum geht, abstrakte Brüche mit diesen Operationen zu verbinden. Jeweils in der eigenständigen Übertragung des Altbekannten in neue Situationen ist eine große Herausforderung an den Schüler zu sehen. Nach SEEL (1997) stellt diese Transposition sogar das Schlüsselprinzip menschlichen Erkennens überhaupt dar.

1.2 Bruchrechnen und Modellbildung

Ein weiteres Beispiel aus dem Hauswirtschaftsunterricht in einer sechsten Hauptschulklasse: Jeweils 6 Schüler sollen gemeinsam Bananenmilch herstellen. Pro Person brauchen sie dazu eine halbe Banane und einen viertel Liter Milch. Auf die Frage, wie viele Bananen und wie viel Milch sie für 6 Personen brauchen, kann von 24 Schülern kein einziger antworten, obwohl sie alle seit einem halben Jahr Bruchrechnen lernen. Nach langem Zögern kommen einige Vermutungen über die benötigten Mengen; auch die richtige Lösung ist irgendwann dabei, jedoch nur als eine unter vielen wild geratenen Annahmen, die jeglicher Anschauung entbehren.

Die in Baden-Württemberg seit dem Herbst 2004 gültigen Bildungspläne fordern, dass die Schüler nicht nur schematisch rechnen können sollen, sondern dazu in der Lage sind, in realen Sachsituationen den mathematischen Gehalt zu erkennen und das Problem mathematisch formulieren zu können: „Sie [die Mathematik] bietet die Möglichkeit, Gegebenheiten der Realität zu beschreiben." (MINISTERIUM FÜR KULTUS JUGEND UND SPORT BADEN-WÜRTTEMBERG 2004a, 60) und „Es geht um die Verwendung von Mathematik in einem breiten Spektrum unterschiedlicher Situationen" (ebd., 60). Der Bildungsplan Hauptschule führt dazu aus: „Die Anwendung von Mathematik in vielen verschiedenen Situationen ist wichtiger Bestandteil mathematischer Grundbildung" (MINISTERIUM FÜR KULTUS JUGEND UND SPORT BADEN-WÜRTTEMBERG 2004b, 74) und: „Da der Bezug von Mathematik zum Alltag in der Hauptschule von ganz besonderer Bedeutung ist, kommt der Leitidee „Modellieren" eine Schlüsselrolle zu. Wissen muss anwendbar sein." (ebd., 75). Das obige Beispiel aus dem Unterricht führt besonders drastisch vor Augen, wie wenig der Unterricht zur Bruchrechnung in dieser Klasse gebracht hat. Die Bruchrechnung zu beherrschen, macht nur Sinn, wenn in realen Situationen erkannt wird, dass eine Situation gegeben ist, die sich mit Bruchrechnung behandeln lässt.

MALLE schreibt dazu: „Bruchrechnen ohne dahinter stehende Vorstellungen ist ein totes Wissen, das man nicht anwenden kann." (MALLE 2004, 4). Die wesentlichen Vorstellungen zum Bruchrechnen sind im selben Artikel beschrieben.

Es dürfte klar sein, dass mit reinem Regelwissen Die Bruchrechnung nicht anwendbar ist. Dazu benötigt der Schüler nicht nur eine klare Vorstellung von den verwendeten Begriffen, sondern auch vernetztes Wissen. Zitat aus dem neuen Bildungsplan: „[…] flexibles und vernetztes Wissen sind Grundlage für ein tiefergehendes mathematisches Verständnis" (MINISTERIUM FÜR KULTUS JUGEND UND SPORT BADEN-WÜRTTEMBERG 2004a, 60). Die Vorstellung von einem Bruch muss so gut sein, dass sie in ein Gefüge anderer Vorstellungen passt. Zentrales Ziel des Bruchrechnenunterrichts sollte nicht mehr sein, dass die Schüler möglichst schnell Aufgaben vom Typ (1) rechnen können, sondern dass die Schüler in Sachsituationen, die es erfordern, mit Brüchen rechnen können. „Die Intention mathematischer Standards ist es, Schülerinnen und Schüler zu befähigen, mathematische Kompetenzen zu benutzen, um in einer sich verändernden Welt Probleme lösen zu können" (ebd., 60).

Um also den neuen Lehrplänen gerecht zu werden, müssen die Grundvorstellungen im jeweiligen mathematischen Gebiet die zentrale Rolle im Unterricht spielen. Bei der Beschäftigung mit Mathematik müssen für die Schüler Fragen im Vordergrund stehen wie etwa: *Wie verstehe ich den Sachverhalt am besten?*, aber nicht: *Welche Formel nehme ich am besten?* oder gar: *Was will die Lehrerin von mir hören?* .

Aber wie kann man das erreichen? Erfahrungsgemäß stürzen sich Schüler auf Formeln, wenn sie welche geboten bekommen. Es ist eben einfacher, sich eine Rechenregel anzueignen, über die man nicht nachzudenken braucht, als mühsam zu verstehen, wohin die Lehrerin einen führen will. Auch für Lehrer ist es leichter, die Schüler Formeln lernen zu lassen, als zu versuchen, Ihnen Vorstellungen näher zu bringen. Die Forderung der Didaktiker ist hier nicht neu: Regeln müssen viel später eingeführt werden und zwar erst dann, wenn die Vorstellungen in ausreichendem Maß vorhanden sind (siehe z. B. PADBERG 2003). Unverstandene Rechenregeln sind kontraproduktiv, sie schaden mehr als sie nützen, weil sie die Schüler von den eigentlich wichtigen mathematischen Begriffsbildungen abhalten. Denken Schüler beim Lösen einer Aufgabe darüber nach, welche Regel hier jetzt die richtige wäre, so ist das kein produktives Denken im Sinne Wertheimers (siehe WERTHEIMER 1945). Produktiv wird Denken beim Bruchrechnen erst bei der Bezugsetzung der Aufgabenstellung zu vorhandenen Grundvorstellungen beim Schüler.

1.3 Das Konzept zum Unterrichten von Bruchrechnen

Konzepte zum Unterrichten von Bruchrechnen gibt es viele. Bruchrechnen im Unterricht wurde von Mathematikdidaktikern schon immer als besonders problematisch angesehen. Deswegen gibt es eine große Zahl von unterschiedlichen Ansätzen dazu (für eine Übersicht siehe z. B. PADBERG 2003).

Unser Konzept ist für Haupt- und Realschule gedacht und wurde dort auch von uns erprobt. Es ist natürlich auch im Gymnasium durchführbar, obwohl dort vermutlich weniger lange und intensiv Grundvorstellungen geschult werden müssen.

Basis unseres Konzepts zum Unterrichten von Bruchrechnen ist eine Stärkung der

Grundvorstellungen. Durch starken Einsatz von Anschauungsmaterialien verinnerlichen die Schüler Vorstellungen, auf die sie, zunehmend ohne Material, zur Lösung komplexerer Aufgabenstellungen zurückgreifen. Regeln zum Bruchrechnen werden von den Schülern nur selbst formuliert und zwar individuell einzeln gegen Ende der Einheit, um die Gewissheit zu haben, dass sie ihnen nicht unverstanden vorgegeben werden. Dafür spielt von Anfang an die ständige Interpretation eines Bruchs entweder als Größe oder als Operator eine zentrale Rolle. Die *Vorstellung eines Bruches als Größe* bedeutet immer einen Rückbezug auf eine feststehende Einheit (z. B. Viertelstücke einer Pizza oder Viertelstücke einer anderen gedachten oder vorliegenden Einheit). Um 3 Viertel zu erzeugen, werden also 3 dieser gleich großen Stücke genommen. Eine andere *Vorstellung* ist die *des Bruches als Operator*. Hier geht es immer um den relativen Anteil an einer Gesamtheit, z. B. ¾ von 24 Schülern sind Mädchen.

Die Schüler müssen sich bei der Beschäftigung mit Bruchrechnung ständig diese Interpretationen von Brüchen vor Augen halten um Aufgaben lösen zu können. Wir bieten ihnen dazu in unserem Konzept keine Alternative. Die Lehrperson muss an keiner Stelle unseres Konzepts Inhalte erklären, sondern nur methodische Hilfen zur selbstständigen Erarbeitung der Inhalte geben.

Angestrebt ist, dass die Schüler sich selbst Regeln erarbeiten. So kommt es durchaus vor, dass Schüler plötzlich sagen: „Beim Kürzen muss ich ja nur Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl teilen.“ Wenn ein Schüler so weit ist, dann hat er die Vorstellungen gut genug aufgebaut, um in Zukunft, wo notwendig, mit dieser Regel arbeiten zu können. Die Regel ist jetzt eine Erleichterung für ihn, weil er zeitökonomischer arbeiten kann und, vielleicht noch entscheidender, bei komplexen Aufgabenstellungen, bei denen die zuvor verwendeten elementaren Vorstellungen alleine zur Lösung nicht ausreichen, jetzt die Aufgaben bearbeiten kann. Die Regel selbst ist in die Vorstellungswelt des Schülers integriert.

Unser Konzept geht nicht, oder nur am Rande, auf die Behandlung von Dezimalbrüchen ein. Ebenso wird die Interpretation eines Bruchs als Verhältnis nicht behandelt. Ansonsten sind Inhalte und Veranschaulichungen dieselben, die traditionell behandelt werden. Der Unterricht zum Bruchrechnen gliedert sich in drei Phasen. In jeder Phase wird der gesamte Stoff der Bruchrechnung behandelt, mit Ausnahme der Multiplikation und Division von Brüchen, die in der ersten Phase ausgeklammert werden. Damit werden die meisten Inhalte der Bruchrechnung dreimal behandelt, jeweils auf einer höheren Stufe als das letzte Mal. Getreu dem Prinzip der Verinnerlichung ist die erste Phase noch konkret anschaulich und geht über die zweite Phase in der dritten Phase langsam über zum Abstrakt-symbolischen.

Die erste Phase, die *enaktiv-ikonische Phase*[1], kann durchaus in der fünften oder, sofern die Lehrpläne dies zulassen, in der vierten Klasse unterrichtet werden. In ihr werden Aufgaben mit Material gelegt und symbolisch notiert. Kennzeichen dieser Phase sind die folgenden:

---

[1] „Im Sinn der Repräsentationsebenen nach BRUNER (vgl. BRUNER, 1971, z.n. WITTMANN, 1981, 87ff.) bezeichnen wir die erste Phase als “enaktiv-ikonisch”. Dabei bedeutet: enaktiv = handelnd (z.B. das Zerschneiden eines Kuchens), ikonisch = bildlich darstellend (z.B. eine Zeichnung des geteilten Kuchens)”

- Brüche werden meistens als Größen gedacht (bei 3 *Vierteln* werden die Viertel also als eine Art Einheit gesehen - 3 gleich große Stücke) und nur gelegentlich werden einfache relative Anteile betrachtet (1 Viertel von 500g Mehl).
- Gearbeitet wird grundsätzlich mit Material, fast alle Aufgaben können mit Material gelegt werden.
- Brüche werden in gesonderter Schreibweise geschrieben (z. B.: 1 *Viertel* oder 3 *Achtel*). Zugrunde liegt die Grundvorstellung eines Bruchs als Quasikardinalzahl (siehe MALLE 2004).
- Es kommen nur Brüche mit einfachen Nennern vor (Ganze, Halbe, Drittel, Viertel, Sechstel, Achtel, Neuntel, Zwölftel, Sechzehntel).

Die gesonderte Schreibweise erleichtert das Denken eines Bruchs als Größe. Damit wird die Addition von Brüchen mit gleichen Nennern einfach:

1 Viertel + 2 Viertel = 3 Viertel

Das ist eine Rechnung wie: 1 cm + 2 cm = 3 cm und für die Schüler leicht nachzuvollziehen. Bruchrechnung wird zurückgeführt auf das Rechnen mit natürlichen Zahlen. Inhalte in der enaktiv-ikonischen Phase sind im Wesentlichen: Addition und Subtraktion von gleichnamigen Brüchen, Größenvergleich von Brüchen, Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einem Bruch, Division von einem Bruch durch eine natürliche Zahl, Erweitern und Kürzen, gemischte Brüche, Veranschaulichung der einfachen Brüche am Zahlenstrahl.

In der zweiten Phase, der *Phase der operativen Behandlung,* soll die Intuition auf Brüche ausgedehnt werden, die sich nicht mehr mit Material legen lassen (Hundertstel, Dreihundertfünfzigstel). Symbolisch Notiertes soll mit Vorstellung gefüllt werden. Im Prinzip werden alle Typen von Brüchen mit beliebigen Nennern behandelt, soweit sie in der Haupt- oder Realschule behandelt werden sollten. Sind die Schüler in der Lage, die abstrakte Notation eines Bruchs mit Vorstellungen zu verbinden, wird ihnen die Standardschreibweise von Brüchen angeboten. Da die zu Beginn eingeführte Schreibweise insbesondere die Vorstellung eines Bruches als Größe stützt, ist eine Umstellung in der Schreibweise für das Operatorkonzept nützlich. Inhalte sind im Wesentlichen dieselben wie in der ersten Phase, aber es kommt noch die Multiplikation und Division von Brüchen dazu. Wichtig ist hier, dass nicht mehr alles mit Material gelegt wird. Zum großen Teil müssen Vorstellungen im Kopf erzeugt werden, um die Aufgaben lösen zu können. Keine einzige Regel wird zentral für die Klasse formuliert, jedoch sollte über Phänomene unter den Schülern oder im Klassenverband diskutiert werden.

In der darauf folgenden *symbolischen Phase* werden alle Inhalte der Bruchrechnung, die traditionell an Haupt- oder Realschule gelernt werden, behandelt. Ziel ist hier, die Gesetzmäßigkeiten, die von den Schülern intuitiv erfasst wurden, explizit zu benennen und zu diskutieren. Regeln sollen mit Vorstellungen gefüllt werden. In dieser Phase formulieren die Schüler ihre eigenen Regeln zur Bruchrechnung und halten diese schriftlich fest. Rückgriffe auf Material werden nur noch zugelassen, wenn die Schüler noch Veranschaulichungen brauchen. Schwierige Aufgaben können aber, manchmal auch nur gedanklich, am Material interpretiert werden. Hier kann man Dezimalbrüche als neue Schreibweisen für bestimmte Brüche einführen.

Diese drei Phasen sollten beim Unterrichten nur als Richtlinie gesehen werden und müssen nicht völlig starr eingehalten werden. Man kann durchaus in der enaktiv-ikonischen Phase Brüche wie 50 Hundertstel oder ähnliche behandeln. Sinnvollerweise werden die Phasen in verschiedenen Schuljahren behandelt. Die neuen Lehrpläne der einzelnen Bundesländer bieten dazu im Allgemeinen die Freiheit. So kann die erste Phase gut in der fünften, eventuell sogar schon in der vierten Klasse behandelt werden, die anderen Phasen entsprechend später.

2 Zur Durchführung des Unterrichts

Unser Konzept behandelt weniger detaillierte Einzelschrittplanungen als vielmehr eine übergreifende inhaltlich-methodische Gesamtkonzeption. Uns geht es hier nicht so sehr um Entscheidungen, was in Gruppenarbeit erarbeitet wird und was in Einzelarbeit. Entscheidungen dieser Art trifft jede Lehrerin am Besten eigenständig. Konkretes Material zu dem Konzept, im Wesentlichen Arbeitsblätter, findet sich in ROSEBROCK/SCHILL (2005).

2.1 enaktiv-ikonische Phase

Die enaktiv-ikonische Phase beginnt mit der Einführung des Bruchbegriffs. Anhand von mehrfach gefaltetem DinA4-Papier versuchen die Schüler einzuschätzen, wie viele Schichten übereinander liegen, bzw. wie groß der sichtbare Teil ist. Dazu müssen sie in der Vorstellung bereits den sichtbaren Teil zu einem ganzen Papier ergänzen, d. h. sie setzen implizit das Ganze und den Teil zueinander in Bezug. Die Strategie ist vom Prinzip her einfach, nur mangelnde Größenvorstellungen könnten hinderlich sein. Im Anschluss wird jedes einzelne Papier aufgefaltet und für einen eingefärbten Teil der Name *1 Drittel, 1 Viertel, ...* eingeführt.

Im Anschluss versucht jeder Schüler, verschiedene DinA4-Papiere in Drittel, Viertel, und andere einfache Brüche durch Falten zu zerlegen. Ein Bruchteil wird jeweils eingefärbt und beschriftet. Dieses erste Anschauungsmaterial ermöglicht, Bruchteile in Bezug zu einem DinA4-Ganzen auf einen Blick zu sehen.

Eine mögliche Auswahl an einfachen Brüchen, für die dieses Material gebastelt werden kann, wären Halbe, Viertel, Achtel, Sechzehntel, Drittel, Sechstel, Neuntel, Zwölftel. Schon an der Reihenfolge der Aufzählung zeigt sich, auf welcher Grundlage die Brüche ausgewählt wurden: Als Nenner tauchen Vielfache von 3 und 4 (2) auf. Innerhalb dieser Brüche lassen sich relativ einfach Hauptnenner finden, die nicht über die Sechzehntel hinausgehen, da sich ähnliche Primfaktorzerlegungen ergeben.

Für alle sichtbar wird ein Satz von solchen Bruchteilen in doppelter Größe im Klassenzimmer aufgehängt. Diese Plakate sollen im weiteren Unterrichtsverlauf angeheftete Merksätze eines stark regelzentrierten Unterrichts ersetzen und den Schülern allein durch ihre Veranschaulichung helfen. Auf diese Weise werden die Schüler beim Nachdenken unterstützt, anstatt durch pures Anwenden einer vorgegebenen Regel daran gehindert zu werden.

Zudem stellt jeder Schüler noch einmal die gleichen gefalteten DinA4-Seiten her, die nun aber zerschnitten werden, so dass mit ihnen variabel unterschiedliche Aufgaben gelegt und veranschaulicht werden können.

Ausgehend davon, dass die Schüler mit den einzelnen Grundrechenarten aus dem Bereich der natürlichen Zahlen vertraut sind, lassen sich einfache Aufgaben zu jeder Grundrechenart nun für den Schüler von alleine erschließen, sofern sie sich anhand des vorhandenen Materials lösen lassen.

Von nun an sind die Schüler frei, sich dieser Veranschaulichungen zu bedienen, wann immer sie diese benötigen. Da es sich jedoch um eine eingeschränkte Auswahl an Bruchteilen handelt, werden sie in den folgenden Phasen zwar unbrauchbar als konkrete Ergebnislieferanten, bleiben als Hinweisgeber auf Lösungsprinzipien jedoch weiterhin aktuell. Indem sich die in den Aufgaben verwendeten Nenner immer stärker vom Material entfernen, wird die intendierte allmähliche Loslösung vom konkreten Material forciert.

Beispiele für Aufgaben und ihre Lösungen aus der enaktiv-ikonischen Phase sind:

- *2 Sechstel + 3 Sechstel = 5 Sechstel* (Addition als Zusammenfügen von zwei Mengen)
- *9 Zwölftel - 4 Zwölftel = 5 Zwölftel* (Subtraktion als Vermindern)
- *2 × 3 Achtel = 6 Achtel* (Multiplikation als Vervielfachen)
- *1 Ganzes : 4 = 1 Viertel* (Division als Verteilen)
- *4 Achtel = 1 Halbes* (Kürzen als Umtauschen von mehreren kleinen Bruchstücken in wenige große. Dabei bleibt die Gesamtmenge offensichtlich gleich groß)
- *Setze < oder > ein: 3 Viertel __ 1 Drittel* (Größenvergleich von Brüchen am Material)
- *1 Viertel von 24 Kindern* (Bruch als relativer Anteil)

Die Grundrechenarten sind aus dem Bereich der natürlichen Zahlen bekannt. Das Erweitern und Kürzen wird an dieser Stelle noch nicht explizit so benannt. Die kardinale Schreibweise (*1 Viertel* statt ¼) hilft den Schülern, den Zähler als anzahlbestimmendes Element zu verinnerlichen und den Nenner als Einheit. Wenn z. B. 1 Viertel + 1 Viertel berechnet werden soll, stellt sich nicht die Frage nach einer Regel. Der Schüler fügt einfach zwei Viertelstücke aneinander und erkennt, je nachdem wie weit er fortgeschritten ist, dass es sich um 2 Viertel bzw. um 1 Halbes handelt. Erkennt er beides, hat er bereits das Prinzip des Kürzens und Erweiterns verstanden, nämlich in diesem Fall 2 Viertel = 1 Halbes. Dabei kann er keinerlei von außen vorgegebene Bruchrechenregel anwenden und ist auf die Anschauung angewiesen. Hierbei kann er seine eigenen Entdeckungen machen und erste Regelhaftigkeiten erkennen, ohne dass diese explizit für den gesamten Klassenverband formuliert werden.

Immer wieder sollten auch andere Veranschaulichungen der Bruchzahlen hinzugezogen werden. Am Zahlenstrahl wird deutlich, dass, anders als bei den natürlichen Zahlen, ein Bruch mehrere Repräsentanten haben kann. Auf diese Weise befinden sich

1 Halbes und 2 Viertel an der gleichen Stelle des Zahlenstrahls. Ebenso bietet es sich an, an Stelle des DinA4-Papiers andere Bezugsganze zu verwenden. Dabei kann es sich einfach um eine andere Form (Kreise, Sterne, ...) handeln; wichtig ist aber auch eine frühzeitige Einführung des Operatorkonzeptes (also Brüche als Operatoren zu behandeln), bei dem das Bezugsganze eine Menge, z. B. die Kinder einer Klasse, ist.

Hier wird eine andere Grundvorstellung als bisher angesprochen, was eine anspruchsvolle Hürde sein könnte. Die bisherige Erfahrung zeigte jedoch, dass die Schüler (Haupt- und Realschüler) damit kaum Schwierigkeiten hatten. Kommen Brüche als Operatoren vor, so sind sie auch über das Material erschließbar: *1 Viertel von 12 Kindern sind Jungen* lässt sich am Material deuten: In die vier Kästchen des in Viertel eingeteilten DinA4 Blattes stelle man sich jeweils drei Kinder eingezeichnet vor.

Das hergestellte Material eignet sich aber vor allem zur Darstellung des Größenkonzeptes. Zur Einführung des Operatorkonzeptes sollten zusätzlich andere Veranschaulichungen hinzugenommen werden. Hier eignen sich Sachkontexte in besonderem Maße. Aus ihrem Lebensumfeld kennen die Schüler Formulierungen wie „zwei Drittel der Klasse“, „eine halbe Portion“ oder „eine dreiviertel Stunde“.

Diese Kontexte sind in zweierlei Hinsicht bekannt:

1. Die Schüler verstehen und benutzen solche und ähnliche Formulierungen bereits im Alltag und verbinden zumeist eine mathematisch sinnvolle Vorstellung damit.
2. Obwohl die Beispiele zum Operatorkonzept hinführen sollen, beinhalten sie in gewisser Weise wieder das bereits eingeführte Größenkonzept. Als Größe, bzw. als Ganzes kann die Klasse, die Portion oder die Stunde gesehen werden. Auf diese Weise taucht wieder das Ganze als Bezug auf.

Im Hinblick auf das Operatorkonzept geht es jedoch um den Teil von mehreren Ganzen, nämlich von 24 Schülern, 300g Spaghetti oder 60 Minuten. Für eine ungefähre Vorstellung reicht also das bereits bekannte Größenkonzept aus, während eine genaue Berechnung des Anteils nicht ohne Größenkonzept möglich ist.

Bereits in der ersten Phase sollten die Schüler immer wieder dazu aufgefordert werden, ihre Ergebnisse verbal und zeichnerisch zu begründen. Dadurch gewinnen sie bereits Handwerkszeug, um in den späteren Phasen Aufgaben zu lösen, die nicht mehr anhand des Materials lösbar sind.

2.2 Phase der operativen Behandlung

In dieser Phase geht es um sinnbezogenes Üben, das der Vertiefung des Verständnisses dient. Symbolisch notierte Brüche und Operationen füllen sich dadurch mehr und mehr mit Sinn. Es wird die Darstellung eines Bruches noch einmal explizit in den Fokus genommen und thematisiert. Hierzu gehören das Erweitern und Kürzen ebenso wie der Darstellungswechsel zwischen einer gemischten Zahl (2 Ganze + 3 Viertel) und einem unechten Bruch (11 Viertel). Beides wird unabdingbar, je komplexer die Aufgabenstellungen werden.

Das Erweitern und Kürzen ist zur Durchführung der Addition und Subtraktion notwendig, während die Darstellung als gemischte Zahl hilft, um sich ein Ergebnis besser vorstellen zu können, denn auf diese Weise erkennt man auf Anhieb die Position der gegebenen Zahl zwischen zwei natürlichen Zahlen. Ergebnisse können somit besser daraufhin überprüft werden, ob sie realistisch sind.

An beiden Stellen bieten sich Möglichkeiten für die Schüler, Regeln selbst zu entdecken. Dem Erweitern liegt die Vorstellung zugrunde, eine Einteilung zu verfeinern, dem Kürzen entspricht das Zusammenfassen mehrere Bruchstücke; dies ist bereits anhand des Materials in der ersten Phase erprobt oder durch Zeichnen bzw. Radieren zeichnerisch visualisiert worden. Bereits früh haben die Schüler erkannt, dass jeweils x Xtel ein Ganzes ergeben. Dadurch liegt es auf der Hand, jeweils so viele Ganze zu bilden, wie möglich und den Rest zu ergänzen. So ergibt sich der Darstellungswechsel zwischen gemischter Zahl und Bruchzahl.

Mit dem Handwerkszeug des Erweitern und Kürzens können sich die Schüler einfacher der Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche annähern. Hier hilft wieder die quasikardinale Schreibweise. Durch diese wird für den Schüler offensichtlich, dass Brüche mit unterschiedlichen Nennern nicht addiert oder subtrahiert werden können. In Verbindung mit dem Wissen über das Kürzen und Erweitern können die Schüler jedoch die Brüche so umwandeln, dass sie am Ende eine für sie lösbare Aufgabe mit gleichen Nennern vor sich haben. Neue Konzepte von Addition und Subtraktion können in bereits bekannte integriert werden.

Während in der enaktiv-ikonischen Phase zur Division nur einfachste Zweiteilungen (im Sinne des Verteilens) vorgenommen wurden, in machen Fällen auch Drei- oder Vierteilungen, steht nun das Aufteilen im Sinne des Messens einer Strecke im Vordergrund. Auf diese Weise kann nicht nur durch natürliche Zahlen, sondern auch durch Brüche geteilt werden.

In der ersten Phase konnte *1 Halbes : 2* dadurch visualisiert werden, dass das Halbe in zwei Teile geteilt wurde. *1 Halbes : 1 Viertel* wäre auf diese Weise jedoch nicht mehr realisierbar. Hier wird eine neue Vorstellung des Teilens gebraucht:

- *Tim gießt 2 Liter Saft in Viertel-Liter-Gläser. Wie viele Gläser kann er füllen?*
- *Wie viele Strecken der Länge 1 viertel m passen in 2m?*

Offensichtlich ist nun nicht mehr die Anzahl der Teilmengen gegeben sondern ihre Größe, während die Anzahl gesucht ist. Auch hier gibt es wieder eine Einschränkung, denn zunächst behandeln wir Aufgaben, in denen eine ganzzahlige Anzahl von Teilmengen entsteht. Diese Art von Aufgaben ist wesentlich einfacher realitätsnah darzustellen und vorzustellen.

Implizit findet hier auch ein Rückbezug auf die Multiplikation statt, denn viele Schüler rechnen nicht *2 : 1 Viertel = x*, sondern *x × 1 Viertel = 2*. Über die Umkehraufgabe kann dann die Division formuliert werden.

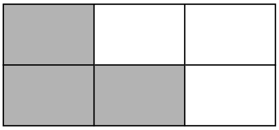
Denkbar sind auch geringe Vorstöße in die nächstschwierigere Stufe, wie etwa:

Wie viele Strecken der Länge 1 Halbes braucht man, um eine Strecke der Länge 9 Viertel zu legen?

Hier ergibt sich schnell ein nahe liegender Fehler: Einfach ist, dass man mit *4 × 1 Halbes* auf *8 Viertel* kommt. Nun muss noch 1 Viertel ausgelegt werden, was jedoch noch nicht das Ergebnis ist, denn 1 Viertel bedeutet, dass noch eine halbe Strecke der Länge 1 Halbes hinzugefügt werden muss. Das Ergebnis ist also *4 Ganze + 1 Halbes* und nicht *4 Ganze + 1 Viertel*.

Insgesamt ist eine stetige Steigerung des Niveaus zum einen in den oben beschriebenen inhaltlichen Aspekten zu verzeichnen und zum anderen darin, dass immer wieder Brüche vorkommen, die nicht mehr mit dem konkreten Material gelegt werden können.

Typische Aufgaben dieser Phase sind z. B.:

- *31 Drittel* = (als gemischte Zahl schreiben)
- *In der Klasse 6c sind 24 Schüler. 2 Drittel der Klasse sind Jungen.* (Bruch als Teil mehrerer Ganzer)
- 

  Welcher Bruch ist hier dargestellt? Unterteile in kleinere Bruchteile und benenne wieder. (Erweitern)
- *Kürze 15 Zwölftel so weit wie möglich.*
- *1 Halbes + 3 Viertel* = (Addition / Subtraktion mit verschiedenen Nennern)
- *20 Vierzigstel + 1 Halbes =*
- *5 × 3 Achtzehntel* = (Brüche, die nicht am Material aber in der Vorstellung reproduzierbar sind)
- *4 : 1 Achtel* = (Dividieren als Aufteilen)
- *Die Klasse 6b hat Kunstunterricht. Der Unterricht dauert 3 Viertel Stunden. 2 Drittel der Zeit malen die Schüler ein Bild.* (Sachkontexte zur Veranschaulichung; inhaltlich immer wieder ein behutsames „Über-den-Tellerrand-der-zweiten-Phase-Schauen“).

Eine Loslösung von der quasikardinalen Schreibweise erfolgt individuell bei jedem Schüler so, wie er es kann und will. Die Arbeitsaufträge sind noch quasikardinal gehalten, doch im Laufe der zweiten Phase werden die meisten Schüler vor allem aus Zeitersparnis heraus die konventionelle Bruchschreibweise übernehmen. Wichtig ist, dass sie nach wie vor klar zwischen der Bedeutung von Zähler und Nenner unterscheiden können. Möglicherweise greifen sie nur in Zweifelsfällen auf die quasikardinale Schreibweise zurück.

2.3 Symbolische Phase

Hier wird zunehmend mit dem Schulbuch gearbeitet. Auf diese Weise sind nun auch die Aufgabenstellungen in konventioneller Bruchschreibweise für die Schüler verfügbar. Diese wird auch für die Arbeitsblätter übernommen.

Addition und Subtraktion erstrecken sich nun auch auf teilerfremde Nenner, so dass die Suche nach einem geeigneten Hauptnenner wesentlich schwieriger wird.

Mangelhafte Einmaleinskenntnisse treten hier genau wie im herkömmlichen Bruchrechenunterricht massiv zutage.

Bei der Multiplikation kommt zu der relativ einfachen Möglichkeit, natürliche Zahl mal Bruch zu rechnen, nun auch das Umgekehrte: Bruch mal natürliche Zahl. Bisher half bei der Multiplikation immer die Vorstellung, etwas x-Mal zu nehmen. Wie soll man aber ¼-Mal etwas nehmen? Hier finden wir den Einstieg über Aufgabenketten, die den „von“-Ansatz der Multiplikation betonen (relativer Anteil). Achtung! Die Schüler dürfen nicht grundsätzlich das Wort „von“ mit „mal“ übersetzen, denn 3 von 5 Schülern sind nicht 3 mal 5 Schüler (absoluter Anteil). Trotzdem erscheint der Ansatz recht anschaulich:

Im Kino wiegt eine Portion Popcorn 60g.

a. Klaus nimmt 4 Portionen. Wie viel g sind das?

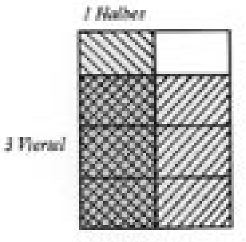
b. Sarah nimmt 2 Portionen. Wie viel g sind das?

c. Leo nimmt ¼ Portion. Wie viel g sind das?

d. Sandra nimmt 1/6 Portion. Wie viel g sind das?

e. Marcel nimmt 5/6 Portionen. Wie viel g sind das?

Zur Multiplikation von Bruch mal Bruch wird den Schülern vor allem die Veranschaulichung eines quer und längs geteilten Rechtecks angeboten:



Hier ist die Darstellung von $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$ oder auch $\frac{3}{4} : 2$ gegeben.

Durch diese Veranschaulichung wird auch der Zusammenhang offenbar, warum beim Multiplizieren von zwei Brüchen jeweils Zähler und Nenner multipliziert werden können.

Die Herleitung der Divisionsregel (mit dem Kehrwert multiplizieren) ist schwierig. Indem die Schüler zu Beginn wieder Strecken oder Mengen teilten, konnten sie eine vertiefte Vorstellung der Division gewinnen. Endgültig richtig zu lösen waren für die Schüler auf diese Weise jedoch nur Divisionen, die „aufgingen“, als Ergebnis also ganze Zahlen hatten. Sobald das Ergebnis ein Bruch ist, wird es mit der exakten Lösung durch die Anschauung alleine schwierig. Nach dem Anwenden der (einzigen vorgegebenen) Regel konnten die Schüler jedoch anschaulich ihr Ergebnis überprüfen.

Zur Divisionsregel (mit dem Kehrwert multiplizieren) fiel uns keine sinnvoll vermittelbare Anschauung ein - in der Literatur findet sich unserer Meinung nach auch keine - so dass der Grundgedanke unseres Konzeptes hier nicht vollständig anwendbar ist. In der Schulmathematik muss es leider häufiger passieren, dass man zwar die Objekte (hier die Brüche) anschaulich vermitteln kann, aber nicht die auf den Objekten wirkenden Operationen (hier die Divisionsregel).

In allen drei Phasen sollten Veranschaulichungen soweit möglich eine große Rolle spielen. Hilfreich ist es insbesondere, wenn die Schüler ihre eigenen Darstellungen finden.

Zunehmend finden in dieser letzten Phase Gespräche im Klassenverband über mögliche Strategien der Bruchrechnung statt. Es sollte jedoch vermieden werden, allgemeingültige Regeln für alle verbindlich und in gleichem Wortlaut zu formulieren. Jeder Schüler hat sein eigenes Bruchrechenheft, in welches er seine eigenen Rechenstrategien einträgt. Von Schüler- und Lehrerseite erfordert das natürlich einen hohen Zeit- und Arbeitsaufwand, da die Hefte immer wieder eingesammelt, mit Kommentaren versehen und wieder überarbeitet werden müssen. Von wesentlichem Vorteil ist es jedoch, dass jeder Schüler die Formulierungen in einer für ihn verständlichen Sprache niederschreibt. Durch das eigenständige Formulieren ist er gezwungen, vorher zu verstehen, was er zu Papier bringen möchte. Für die Lehrperson ergibt sich eine sinnvolle Einsichtnahme in den Lernprozess der Schüler. Im unten dargestellten Fall einer sechsten Hauptschulklasse wurden die Einträge ins Bruchrechenheft immer durch recht konkrete Arbeitsaufträge eingeleitet. Ein freieres Arbeiten wäre hier sicher denkbar.

Das Konzept wurde von uns mehrfach getestet. Es wurden zwei sechste Hauptschulklassen parallel nach diesem Konzept über alle drei Phasen unterrichtet. Im Anschluss wurde ein Vergleichstest durchgeführt, der zeigte, dass die Schüler dieser *Hauptschule* die Aufgaben etwa genauso erfolgreich bearbeiteten, wie durchschnittliche Schüler an österreichischen *Gymnasien*.

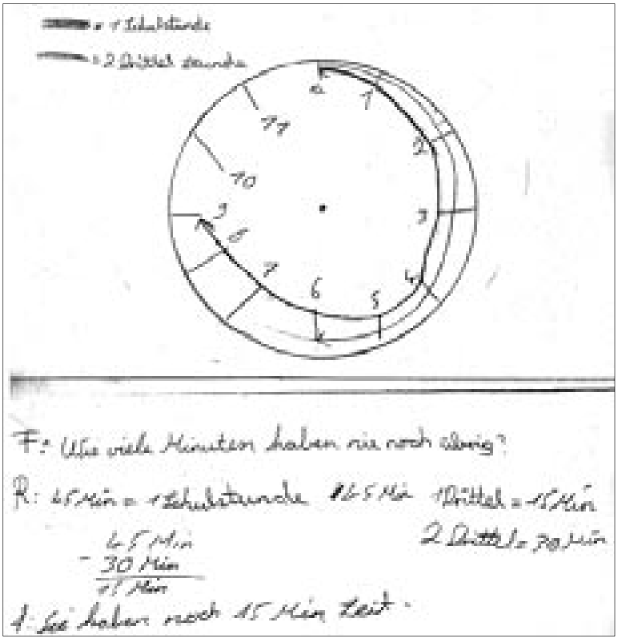
Die erste Phase wurde anschließend in einer fünften Realschulklasse unterrichtet. Ein Vergleichstest mit einer sechsten Realschulklasse, bei der der Bruchrechenunterricht bereits abgeschlossen war, zeigte vergleichbare Ergebnisse. Obwohl nur die *erste Phase* unterrichtet wurde, waren die Schüler vergleichbar mit einer konventionell unterrichteten Klasse, die bereits das *gesamte* Bruchrechenpensum der sechsten Klasse durchgenommen hatte.

3 Anhang: Schülerdokumente

3.1 Anschauliche Lösungen zu verschiedenen Textaufgaben

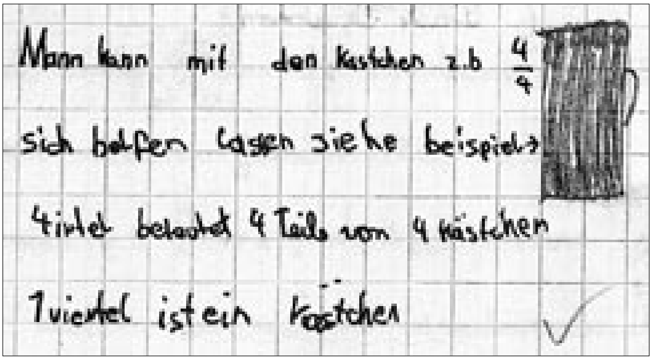
Es sind noch 3 Liter Tee da. Marcel und Jana bekommen zusammen 1 Drittel davon. a) Wieviel bekommen beide zusammen? b) Sie teilen gerecht. Wie viel bekommt Jana?

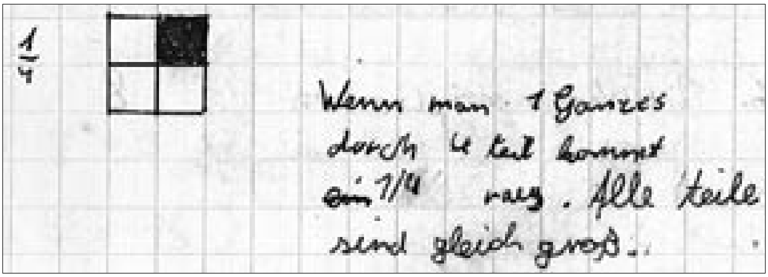
Die Klasse 6b hat Kunstunterricht. Der Unterricht dauert 3 Viertel Stunden. 2 Drittel der Zeit malen die Schüler ein Bild (F, R, A)

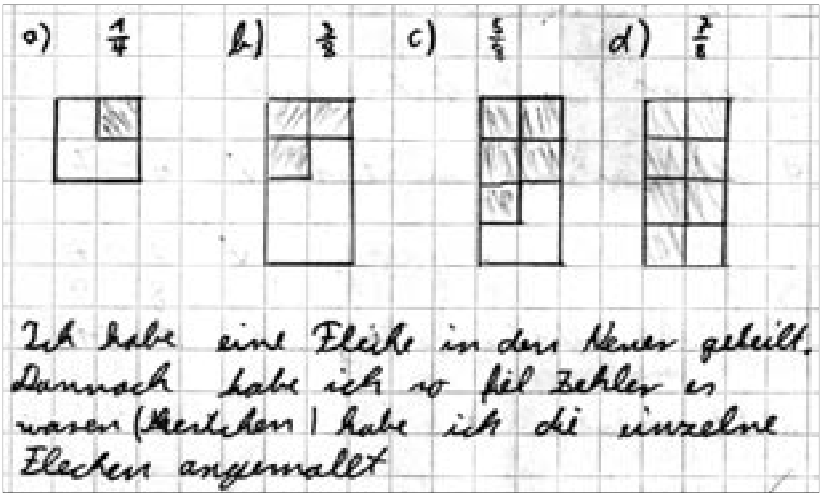


3.2 Ausschnitte aus dem Bruchrechenheft (Phase 3) zur Frage, wie man einen Bruch darstellen kann.

Hier kann man deutlich erkennen, dass die Schüler auf unterschiedliche Veranschaulichungen zurückgreifen, unterschiedliche Aspekte für besonders nennenswert empfinden und sich auf unterschiedlichen Niveaustufen zwischen beispielgebundenen und allgemeingültigen Beschreibungen befinden.







Summary

We introduce a method for teaching the calculus of fractions in school; it is closely related to Gestalt Theory. The central idea is to teach students to generate the proper conceptualizations, as opposed to simply learning rules. The latter is still very common in school. The method consists of three different stages: (i) the first stage focuses on simple fractions and material is used widely; (ii) the second stage focuses on more complicated fractions, where the material cannot always be used; (iii) finally, the third stage introduces common fraction calculus.

Zusammenfassung

Hier wird ein Konzept zum Unterrichten von Bruchrechnung in der Schule vorgestellt, das an gestalttheoretischen Grundsätzen orientiert ist. Zentral ist dabei der Aufbau von Grundvorstellungen über den Weg der Anschauung im Gegensatz zu dem in der Schule oft praktizierten starken Bezug auf Rechenregeln beim Bruchrechnen. Das Konzept gliedert sich in drei Phasen, in denen nach und nach das konkrete Arbeiten am Material durch verinnerlichte Grundvorstellungen zum Bruchrechnen abgelöst wird.

Literatur

KNOCHE, N. et al (2002): Die PISA-2000-Studie, einige Ergebnisse und Analysen. *JMD 23, Heft 3/4,* 159-202.

MALLE, G. (2004): Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *mathematik lehren 123*, 4-8.

METZGER, W. (1973): Wie kann man Kreativität im mathematischen Unterricht fördern? *Bayerische Schule 26,* 115-118.

METZGER, W. (1976): *Psychologie in der Erziehung*. 3.Aufl. Bochum: Kamp

MINISTERIUM FÜR KULTUS JUGEND UND SPORT BADEN-WÜRTTEMBERG (2004a): *Bildungsplan 2004 - Realschule*.

MINISTERIUM FÜR KULTUS JUGEND UND SPORT BADEN-WÜRTTEMBERG (2004b): *Bildungsplan 2004 – Hauptschule / Werkrealschule*.

PADBERG, F. (2003): *Didaktik der Bruchrechnung*. 3.Aufl. Berlin: Spektrum.

ROSEBROCK, S. und SCHILL, A. (2005): Tragfähige Bruchvorstellungen, preprint, erscheint in *Kreative Ideenbörse Mathematik*, MGV-Verlag.

SEEL, H. (1997). Didaktik und Gestaltpsychologie. *Gestalt Theory 19 (2),* 100-127.

SOFF, M. (2001): Gestalttheoretische Beiträge zur Förderung von Kreativität. *Gestalt Theory 23 (3),* 184-195.

WERTHEIMER, M. (1945): *Produktives Denken*. 1.Aufl. Frankfurt: Kramer Verlag.

WINTER, H. (1999). *Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im Mathematikunterricht, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung.* Preprint, Aachen.

WITTMANN, E. (1981): *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. 6.Aufl. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Anschrift der Verfasser:

Stephan Rosebrock und Anna Schill

Pädagogische Hochschule Karlsruhe

Institut für Mathematik und Informatik

Postfach 11 10 62

D-76060 Karlsruhe

e-mail: rosebrock@ph-karlsruhe.de schill@ph-karlsruhe.de